第4講　場合の数・確率

【CHECK & UP】

1　12本のくじがある．そのうち当たりくじは1等が1本，2等が4本であり，残りははずれくじである．このくじから同時に3本を引いたとき，次の確率を求めよ．

(1)　当たりくじを少なくとも1本引く確率を求めよ．

(2)　2等を2本以上引く確率を求めよ．

2　[1]　(1)　1枚の硬貨を3回投げたとき，表が1回だけ出る確率を求めよ．また，表が少なくとも1回出る確率を求めよ．

(2)　1枚の硬貨を4回投げたとき，表が続けて2回以上出る確率を求めよ．

[2]　一つのさいころを投げることを繰り返し，同じ目が3回出たら終わりとして，それまでに出た目の和を得点とするゲームがある．次の問いに答えよ．

(1)　このゲームで起こりうる最小の得点と最大の得点を求めよ．

(2)　このゲームが終わるまでにさいころを投げる回数が4である確率を求めよ．

3　A，Bの二人がそれぞれ袋をもっている．Aの袋には黒玉が3個と白玉が2個，Bの袋には黒玉が2個と白玉が3個入っている．A，Bがそれぞれ自分の袋から同時に2個ずつ玉を取り出すとき，次の問いに答えよ．

(1)　取り出した4個がすべて黒玉である確率を求めよ．

(2)　二人の取り出した黒玉の個数の合計が，偶数ならばAの勝ち，奇数ならばAの負けとする．ただし，0は偶数に含めるものとする．Aが勝つ確率を求めよ．

4　赤，青，黄，緑の4色のカードが5枚ずつ計20枚ある．各色のカードには，それぞれ1から5までの番号が一つずつ書いてある．この20枚の中から3枚を一度に取り出す．このとき次の問いに答えよ．

(1)　3枚がすべて同じ番号となる確率を求めよ．

(2)　3枚が色も番号もすべて異なる確率を求めよ．

(3)　3枚のうちに赤いカードがちょうど1枚含まれる確率を求めよ．

(4)　3枚のうちに赤いカードがちょうど2枚含まれるという条件の下で，カードの番号が2種類である確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

5　さいころを投げて出た目の数だけ数直線上を動く点Pがある．Pは負の数の点にあるときは右に，正の数の点にあるときは左に動くものとする．また，Pははじめ -5 の点にあり，原点または5の点に止まったらそれ以上さいころを投げることができないとする．次の問いに答えよ．

(1)　さいころを2回投げることができて，2回目にPが5の点に止まる確率を求めよ．

(2)　さいころを2回投げることができて，2回目にPが原点に止まる確率を求めよ．

(3)　さいころを3回投げることができて，3回目にPが原点に止まる確率を求めよ．

6　1から6までの番号のつけられている6枚のカードがあり，横一列に配置されている．はじめの配置は1，2，3，4，5，6である．二つのさいころを同時に振るたびに，出た目によってカードの配置を変えていく．もし，出た二つの目が異なるなら，その目と同じ番号のカードの位置を交換し，出た目が同じなら，カードの位置を変えないものとする．次の問いに答えよ．

(1)　二つのさいころを1回振って配置が変わらない確率を求めよ．

(2)　二つのさいころを1回振って，番号1のカードの位置がはじめの配置と異なる確率を求めよ．

(3)　二つのさいころを2回振って，番号1，2，3，4の4枚のカードの位置がどれもはじめの配置と異なる確率を求めよ．

(4)　二つのさいころを2回振って，位置がはじめの配置と異なるカードが番号1，2，3の3枚のみである確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　さいころを繰り返し投げ，出た目の数を加えていく．その合計が4以上になったところで投げることを終了する．

(1)　1の目が出たところで終了する目の出方は［ア］通りである．

2の目が出たところで終了する目の出方は［イ］通りである．

3の目が出たところで終了する目の出方は［ウ］通りである．

4の目が出たところで終了する目の出方は［エ］通りである．

(2)　投げる回数が1回で終了する確率は$\dfrac{［オ］}{［カ］}$であり，2回で終了する確率は$\dfrac{［キ］}{［クケ］}$である．2回で終了するという条件の下で，1の目が1回も出ない確率は$\dfrac{［コ］}{［サ］}$である．

終了するまでに投げる回数が最も多いのは［シ］回であり，投げる回数が［シ］回で終了する確率は$\dfrac{［ス］}{［セソタ］}$である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2] 袋の中に赤玉5個，白玉5個，黒玉1個の合計11個の玉が入っている．赤玉と白玉にはそれぞれ1から5までの数字が一つずつ書かれており，黒玉には何も書かれていない．なお，同じ色の玉には同じ数字は書かれていない．この袋から同時に5個の玉を取り出す．

5個の玉の取り出し方は [アイウ] 通りある．

取り出した5個の中に同じ数字の赤玉と白玉の組が2組あれば得点は2点，1組だけあれば得点は1点，1組もなければ得点は0点とする．

(1) 得点が0点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは [エオ] 通りであり，黒玉が含まれていないのは [カキ] 通りである．

得点が1点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは [クケコ] 通りであり，黒玉が含まれていないのは [サシス] 通りである．

(2) 得点が1点である確率は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチ}}$ であり，2点である確率は $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}}$ である．

また，得点が2点であるという条件の下で，黒球が含まれていない確率は $\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　1 から 9 までの数字が一つずつ書かれた 9 枚のカードから 5 枚のカードを同時に取り出す．このようなカードの取り出し方は [アイウ] 通りある．

(1)　取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがある取り出し方は [エオ] 通りであり，5 と書かれたカードがない取り出し方は [カキ] 通りである．

(2)　次のように得点を定める．

・取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがない場合は，得点を 0 点とする．
・取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがある場合，この 5 枚を書かれている数の小さい順に並べ，5 と書かれたカードが小さい方から k 番目にあるとき，得点を k 点とする．

得点が 0 点となる確率は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である．得点が 1 点となる確率は $\frac{\text{コ}}{\text{サシス}}$ で，得点が 2 点となる確率は $\frac{\text{セ}}{\text{ソタ}}$，得点が 3 点となる確率は $\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$ である．

また，取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがあるという条件の下に，得点が 4 点以上となる確率は $\frac{\text{テト}}{\text{ナニ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　場合の数・確率

[1] 袋の中に，0，1，2，3，4，5 と番号がつけられた同じ大きさの 6 個の球が入っている．この袋から 3 個の球を同時に取り出して，出た数の組合せについて考える．

(1) この組合せは全部で [アイ] 通りある．このうち，連続する二つの数を含まないような組合せは [ウ] 通りある．

(2) 出た数の組合せにより，次のように得点を与えるゲームを考える．

出た数の中に 0 が含まれる場合の得点は 0 点とする

その他の場合は，出た数のうち最大のものを得点とする

(i) 得点が 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である．

(ii) 得点が 4 点となる確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}$ であり，5 点となる確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ である．

得点が 5 点であるという条件の下で，連続した 2 つの数を含まない確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である．

(iii) このゲームを 2 回続けて行う．ただし，1 回目のゲームで取り出した球を袋に戻してから 2 回目を行う．このとき，1 回目と 2 回目の得点が等しくなる確率は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチツ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1から10までの番号がつけられた10枚のカードから，5枚のカードを同時に取り出す．このとき，取り出した5枚のカードの番号の中で，最も大きな番号をL，最も小さな番号をSとして，得点を次のように定める．

・Lが偶数のとき，得点を0点とする．

・Lが奇数のとき，LとSの差$L-S$を得点とする．

(1)　5枚のカードの取り出し方は［アイウ］通りあり，そのうち得点が0点となるカードの取り出し方は［エオカ］通りある．

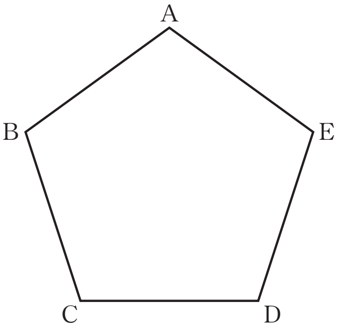
(2)　とり得る得点の中で0点を除いて最も低いのは［キ］点で，得点が［キ］点となるカードの取り出し方は［ク］通りある．

とり得る得点の中で最も高いのは［ケ］点で，得点が［ケ］点となるカードの取り出し方は［コサ］通りある．

(3)　得点が5点となる確率は$\dfrac{\text{シ}}{\text{スセ}}$，得点が6点となる確率は$\dfrac{\text{ソ}}{\text{タチ}}$，得点が7点となる確率は$\dfrac{\text{ツ}}{\text{テト}}$である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 右の図のような正五角形 ABCDE の頂点を，A から出発して，B，C，……の順に左まわりに移動する点 P がある．サイコロを振って出た目の数だけ P を移動することにする．すなわち，1 回目に振ったとき，P は A から出発して，出た目の数だけ左まわりに進んで P_1 に移り，k 回目に振ったとき，P は P_{k-1} から出発して，出た目の数だけさらに進んで P_k に到達するものとする．たとえば，1 回目に 3，2 回目に 2 が出たときは，P_1＝D，P_2＝A である．



(1) サイコロを 2 回振ったとき，

P_1＝P_2 となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，

P_1 と P_2 が隣り合う確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$，

P_2＝A となる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$，

P_2＝C となる確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$，

P_1 または P_2 が A となる確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$

である．

(2) サイコロを 3 回振ったとき，P_3＝A となる確率を求める．

P_2＝E かつ P_3＝A となる確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセソ}}$ である．

P_2≠E のときも同様に考えることにより，P_3＝A となる確率は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテト}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　場合の数・確率

【CHECK & UP】

1　くじの引き方は全部で　${}_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=2\cdot11\cdot10$（通り）ある．

(1)　求める事象の「余事象」は「３本ともはずれ」である．

それは　${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=7\cdot5$（通り）である．

> １回完結型の確率はまず確率の「分母」を計算する．特に数値が大きい場合は「約分」を見据えて「積の形」で留めておく．分子もまったく同じ．

よって，求める確率は　$1-\dfrac{{}_7C_3}{{}_{12}C_3}=1-\dfrac{7}{2\cdot11\cdot2}=\mathbf{\dfrac{37}{44}}$

(2)　求める事象は，「２等を２本」または「２等を３本」引くことである．

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_4C_2\cdot{}_8C_1+{}_4C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{6\cdot8+4}{2\cdot11\cdot10}=\dfrac{3\cdot4+1}{11\cdot5}=\mathbf{\dfrac{13}{55}}$

2　[1]　１回ごとに表が出る確率，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である．

(1)　３回投げたとき，表が１回だけ出るのは

表が出る回を選ぶ　${}_3C_1=3$（通り）ある．

よって，求める確率は　$3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

> 反復試行においては，「何が」「何回」「どういう順番」で起こったのかが大切である．特に「何が」が２択の場合は，どちらかのみに注目して決めることも可能である．ちなみに「反復試行の公式」なるものは存在しない．

表が少なくとも１回出ることの余事象は，すべて裏が出ることである．

よって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\mathbf{\dfrac{7}{8}}$

(2)　表が出ることを○，裏が出ることを×と表し，△は表または裏が出たことを表す．

４回投げたとき，表が連続して２回以上出るのは

連続がどこで始まったかで場合分けして

１回目から　→　○○△△　　その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot1^2=\dfrac{1}{4}$

２回目から　→　×○○△　　その確率は　$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot1=\dfrac{1}{8}$

３回目から　→　△×○○　　その確率は　$1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$

> 「連続が『初めて』始まった回」で場合分けするとそれらがすべて「排反」となる．
> ４回の場合は，連続が途切れると再び連続することはない．
>
> ちなみに４回程度の試行であれば「樹形図」を書くのも有効であろう．

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{4}{8}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

[2]　(1)　得点が最小となるのは，３回連続して１が出て終了したとき．その得点は３点である．

得点が最大となるのは，１～６までの目がすべて２回ずつ出て，最後に６が出たときで，

その得点は　$(1+2+3+4+5+6)\times2+6=\mathbf{48}$（点）である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) 4回投げて終了するのは，3回目までにある特定の目が2回のみ出て，その目が4回目に出て終了するときである．
その目の選び方が $_6C_1=6$（通り）．
1回だけ出る異なる目の選び方が5通り．
3回目までの目の出方が $_3C_1=3$（通り）
よって，求める確率は

$$6\cdot5\cdot3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{5}{72}}$$

1～3回のうち，1回だけ異なる目が出ている．その回を選ぶ．

「終了条件」に関する問題である．終了条件を満たさなければ永遠に続くパターンと，やがて終了条件を必ず満たして終了するパターンに分かれる．センター試験では後者が多く見られる．
いずれにしても「終了条件を満たした」，すなわち「最終回の試行」はその前の試行とは切り離そう．

3　A，Bが2個取り出す場合の数はともに $_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$（通り）

(1) 取り出した4個がすべて黒玉であるのは，A，Bともに黒玉を2個取り出したときである．
Aが黒玉を2個取り出すのは $_3C_2=3$（通り）あり，Bの場合は1通りである．
よって，求める確率は $\frac{3}{10}\times\frac{1}{10}=\mathbf{\frac{3}{100}}$

(2) 取り出した4個のうち，黒玉が2個であるのは次の場合．

・Aが黒玉2個，Bが黒玉0個のとき　その確率は $\frac{3}{10}\times\frac{_3C_2}{10}=\frac{9}{100}$

・A，Bがともに黒玉1個のとき　その確率は $\frac{_3C_1\cdot{}_2C_1}{10}\times\frac{_2C_1\cdot{}_3C_1}{10}=\frac{36}{100}$

・Aが黒玉0個，Bが黒玉2個のとき　その確率は $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$

よって，黒玉が2個である確率は $\frac{9+36+1}{100}=\frac{46}{100}$

取り出した4個のうち，黒玉が0個であるのは，A，Bともに白玉を2個取り出したときであり，その確率は $\frac{1}{10}\times\frac{_3C_2}{10}=\frac{3}{100}$

取り出した4個がすべて黒玉である確率は(1)より $\frac{3}{100}$

よって，Aが勝つ確率は $\frac{3+46+3}{100}=\frac{52}{100}=\mathbf{\frac{13}{25}}$

登場する人数やものが増えると，起こりうる場合をすべて列挙するのに苦労するであろう．ポイントは題意を満たす事象を「排反に分ける」ことである．その方針はさまざまであるが，問題に誘導がある場合はそれに乗り切ることで自然と排反事象に分けることができる問題も存在する．過去問を通して学んでおこう．

4　異なる20枚から3枚のカードを取り出すのは $_{20}C_3=\frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1}=10\cdot19\cdot6$（通り）

(1) 3枚がすべて同じ番号となるとき
その番号の選び方が5通りであり，その番号についているカードの色の選び方が

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$_4C_3=4$（通り）である．よって，求める確率は $\dfrac{5\times4}{10\cdot19\cdot6}=\mathbf{\dfrac{1}{57}}$

(2)　3枚とも色も番号も異なるとき

3枚の番号の選び方が $_5C_3=5\cdot2$（通り）

3枚の色の選び方が $_4C_3=4$ 通り

さらに，どの番号がどの色に対応するかの決め方が

$3!=3\cdot2$（通り）ある．

よって，求める確率は $\dfrac{5\cdot2\times4\times3\cdot2}{10\cdot19\cdot6}=\mathbf{\dfrac{4}{19}}$

> 考えるべき「指標」が「色」と「番号」の２つある問題．問題の条件によって，まずは片方（一般的には「制限・制約がきつい方」）に注目して条件を満たすように決定し，そこで選んだものに対応する形としてもう一方を決定する．
> (2)は(1)に比べてプロセスが１つ増えている．問題文の条件が２つの指標の両方に関連するものであるため，それぞれを決定した後に色と番号を「結びつける」作業である．

(3)　3枚のうちに赤いカードがちょうど1枚含まれるとき

その赤いカードの選び方が5通りあり，残り2枚の選び方は，赤を除く15枚から2枚選ぶ　$_{15}C_2=15\cdot7$（通り）

よって，求める確率は $\dfrac{5\times15\cdot7}{10\cdot19\cdot6}=\mathbf{\dfrac{35}{76}}$

(4)　3枚のカードのうちに赤いカードがちょうど2枚含まれるという事象を A，番号が2種類であるという事象を B とする．

$$P(A)=\frac{_5C_2\times{}_{15}C_1}{10\cdot19\cdot6}=\frac{5\cdot2\times15}{10\cdot19\cdot6}$$

A かつ B であるのは，2種類の番号の選び方 $_5C_2$ 通りに対し，赤いカードの番号がその2種類となり，残り1枚のカードの番号がその2種類のいずれか（２通り）のときである．

よって

$$P(A\cap \mathrm{B})=\frac{_5C_2\times1\times3\times2}{10\cdot19\cdot6}=\frac{5\cdot2\times3\times2}{10\cdot19\cdot6}$$

したがって，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5\cdot2\times3\times2}{5\cdot2\times15}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

> ２つの事象 A，B について，事象 A が起こるという条件の下で，事象 B が起こる確率を，事象 A が起こったときの事象 B の起こる条件付き確率といい，
> $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ で表す．
> 分子は $P(A\cap B)$ である．つまり事象Bを考えるとき，事象 A の起こる条件も含めた形で考える必要があるので注意．

5　さいころを1回振ったとき，1から6のどの目が出る確率も $\dfrac{1}{6}$ である．

(1)　題意を満たすのは4，6の順に出たときの1通りのみである．

よって，求める確率は $1\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2)　題意を満たすのは次の通り．

・2回の出目の組合せが(1，4)，(2，3)のとき

これらの出目の順は任意より，それぞれ　$2!=2$（通り）

よって　$2\times2=4$（通り）

・6，1の順に出たとき．この順番は入れ替え不可である．よって1通り．

> 再び反復試行である．進み方の条件が特殊であるため，どの目が出たかの「組合せ」を考えつつ，それが入れ替え可能か（「順列」が必要か）について考える必要がある．それを (2) では明記した．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より，求める確率は　$5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\mathbf{\frac{5}{36}}$

(3)　題意を満たすのは次の通り．

・3回の出目の組合せが(1，1，3)，(1，2，2)のとき

これらの出目の順は任意より，それぞれ $\frac{3!}{2!}=3$（通り）

よって　$2\times3=6$（通り）

・出目が順に2−4−1，3−4−2のとき

1，2回目の出目の順は任意より，それぞれ $2!=2$（通り）

よって　$2\times2=4$（通り）

・出目が順に3−3−1，4−4−3のとき，2通り．

・出目が順に以下のように出たとき

1−5−1，1−6−2，2−5−2，2−6−3，3−5−3，

3−6−4，4−5−4　→7通り

・出目が順に以下のように出たとき

6−2−1，6−3−2，6−4−3，6−5−4，6−6−5　→5通り

以上より，求める確率は　$24\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{9}}$

> 1～3回目の出目の合計が5の場合は3つの出目の順列の分だけ題意を満たすものがある．
>
> 1，2回目の出目の合計が5を越える場合で，かつ1，2回目ともに5未満の場合は，1，2回目の出目を入れ替えた(順列を考える)ものも題意を満たす．ただし，そのうち，1，2回目の出目が同じ場合は順列が1通り．
>
> 1，2回目の出目の合計が5を越え，かつ1回目が5未満，2回目が5以上の場合は注意．それらを入れ替えたものが題意を満たさない，または題意を満たす3回目の出目が変化するからである．
>
> 1回目が6の場合を丁寧に考えて終了．

6　2個のさいころを1回振ったとき，すべての出目の出方は $6\times6=36$（通り）．

(1)　2個のさいころの出目が同じとき．その出目は6通り．

よって求める確率は　$\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(2)　2個のさいころのうち，どちらかの出目が1，もう一方が2～6である．

1の目がどちらのさいころの目なのかで2通り，

もう一方の出目の決め方が5通り．

よって，求める確率は　$\frac{2\times5}{36}=\mathbf{\frac{5}{18}}$

> 出目だけを決めて終わってはいないだろうか．確率の世界では原則として「同じものも区別する」．たとえまったく見た目に区別がつかないさいころであろうと，その2つの出目が異なるならば，その2つの出目がどちらのものなのか決定する必要がある．

(3)　1回の試行で入れ替わるカードは多くて2枚．

よって，2回の試行で4枚入れ替わるのは，1回目の試行で1～4のうち2つの目が出て，2回目の試行で1～4のうち1回目で出なかった2つの目が出たときである．

1回目の出目の決め方が　${}_4C_2\times2!=12$（通り）

それに応じた2回目の出目の決め方が　$1\times2!=2$（通り）

よって，求める確率は　$\frac{12}{36}\times\frac{2}{36}=\mathbf{\frac{1}{54}}$

> たとえば1回目の出目が1と3と決めると，2回目の出目は2と4と決まる．ただし(2)同様，その出目がどちらのさいころのものかを決める必要がある．順列で決めた．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4) 2回の試行後の1，2，3の並びで題意を満たすのは，この3数が順に2−3−1，3−1−2と並ぶとき.

(2, 3, 1)となるのは

・1回目に1と2が出て，2回目に3と1が出た場合

・1回目に1と3が出て，2回目に2と3が出た場合

・1回目に2と3が出て，2回目に1と2が出た場合

それぞれ　$2\times2=4$（通り）　合計12通りである.

(3, 1, 2)となるのは

・1回目に1と2が出て，2回目に3と2が出た場合

・1回目に1と3が出て，2回目に2と1が出た場合

・1回目に2と3が出て，2回目に1と3が出た場合

それぞれ　$2\times2=4$（通り）　合計12通りである.

以上より，求める確率は　$\dfrac{12}{36^2}\times2=\mathbf{\dfrac{1}{54}}$

はじめの位置と異なるカードが1，2，3のみであるため，2回の試行でこの3枚の間だけで「入れ替え」が起こった．そのプロセスをすべて列挙したのが左である.
「抜けなく」「もれなく」というのは言うほどやさしくないが，「固定」して決めていく（たとえば「まずは1が移動する場合を尽くそう」など）は，「樹形図」にも通じる考え方で有効.
ちなみに，左の例では題意を満たす「結果」に基づく解答であるが，他にも2回の試行で最初の位置から場所が移動できるカードは最大で4枚分である．1，2，3は必ず移動していることに注目すると，1回目の試行で出る2つの目を1，2，3の中から選び，そこで選ばれなかった目と何が出れば題意を満たすかを考えると
・1回目に1と2が出て，2回目に3と「1または2」が出る
という場合分けとなる.

確率・場合の数の問題はここで挙げたように誘導がない「単発」の問題と，近年のセンター試験のように「誘導」「流れ」「プロセス」で進んでいく問題に分かれる．まず「単発」で解ける問題に触れることで，自分でその流れを作る鍛錬を積んでおこう．2006年より前のセンター試験の過去問の演習を中心に据え，不足分を問題集などで補うとよいであろう．その上で，2006年からの問題を順に進めていくと，小問が誘導になっていたり，問題に沿って解決していくというセンター試験特有の流れが身体に染み渡るであろう．解答集などを読み込んでおくとよい．流れに乗れなければ，図形分野ほどではないにしても手痛いしっぺ返しをくらうことにもなりかねない．記述式で点数がとれる実力者が，センター試験においては点を取りきれない．その多くは「勝手な思い込みで自分の世界に入ってしまい，時間が不足する」ことに起因する．数学力を磨くと同時に，ぜひ「他人の言っていることの真意を理解し，それに従って実行するスキル」をセンター試験の学習を通じて磨いておこう．また，2014年までに出題された「期待値」は数ⅠAの範囲から除外されたので過去問に取り組むときは注意.

【講義問題　解答例】　※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです.

1 (1) 1が出て終了するのは，その前までの出目の合計が3となり，次に1が出た場合である.

合計が3になる出目は，順に3，2−1，1−2，1−1−1と出た場合．よって　4通り

2が出て終了するのは以下

・その前までの出目の合計が3となり，次に2が出た場合 → 上の結果より4通り.

・その前までの出目の合計が2となり，次に2が出た場合.

　合計が2になる出目は，順に2．1−1と出た場合の2通り.

よって，**6**通り.

3が出て終了するのは以下

・その前までの出目の合計が3，2となり，次に3が出た場合 → 6通り

・その前（まで）の出目（の合計）が1となり，次に3が出た場合 → 1通り

　よって，**7**通り.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4 が出て終了するのは以下

・その前までの出目の合計が 3，2，1 となり，次に 4 が出た場合 → 7 通り

・初回で 4 が出た場合 → 1 通り

よって，8 通り．

（5，6 が出て終了する場合も同様に 8 通り）

(2) 1 回で終了するのは，4，5，6 が出た場合であり，その確率は $\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

2 回で終了するのは，順に次のように出た場合

・1－（3，4，5，6）　・2－（2，3，4，5，6）　・3－（1，2，3，4，5，6）

よって，求める確率は $\frac{1}{6}\times\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right)=\frac{15}{36}=\mathbf{\frac{5}{12}}$

2 回で終了し，かつ 1 が 1 回も出ないのは，順に

・2－(2，3，4，5，6)　・2－(2，3，4，5，6) と出た場合で 10 通り

したがって，求める条件付き確率は $\frac{\frac{10}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{10}{15}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

終了するまでに投げる回数が最も多いのは 4 回である．

4 回で終了するのは，順に 1－1－1－（1，2，3，4，5，6）と出た場合であり，

その確率は $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}=\mathbf{\frac{1}{216}}$

2　5 個の玉の取り出し方は $_{11}C_5=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=11\cdot3\cdot2\cdot7=\mathbf{462}$（通り）

(1) 0 点，すなわち同じ数字がない 5 個の玉の取り出し方のうち，

・黒玉が含まれるのは，

それ以外の 4 個の数字の選び方が $_5C_4=5$（通り），色の選び方が $2^4=16$（通り）

よって　$5\times16=\mathbf{80}$（通り）

・黒玉が含まれないのは，

5 個の数字の選び方が 1 通り，色の選び方が $2^5=32$（通り）

よって　$1\times32=\mathbf{32}$（通り）

1 点，すなわち同じ数字が 1 組，残りの 3 個の玉はすべてそれと異なる相異なる数字となる取り出し方のうち，

・黒玉が含まれるのは

それ以外の 4 個が，同じ数字 1 組，それと異なる相異なる数字の玉 2 個のとき

数字と色の選び方を考えて　$({}_5C_1\times1)\times({}_4C_2\times2^2)=\mathbf{120}$（通り）

・黒玉が含まれないのは

5 個のうち，同じ数字 1 組，それと異なる相異なる数字の玉が 3 個のとき

数字と色の選び方を考えて　$({}_5C_1\times1)\times({}_4C_3\times2^3)=\mathbf{160}$（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) (1)より得点が1点である場合の数は　120＋160＝280（通り）

得点が2点である場合の数は　462−(112＋280)＝70（通り）

よって，得点が1点である確率は　$\frac{280}{11\cdot3\cdot2\cdot7}=\mathbf{\frac{20}{33}}$

2点である確率は　$\frac{70}{11\cdot3\cdot2\cdot7}=\mathbf{\frac{5}{33}}$

また，得点が2点であり，かつ黒玉が含まれているのは，

5個の球のうち，黒玉を除く4個の玉が，同じ数字の2組である場合である．

その数字の選び方を考えて　${}_5C_2=10$（通り）

よって，得点が2点であり，かつ黒球が含まれていないのは　70−10＝60（通り）

したがって，求める条件付き確率は　$\dfrac{\frac{60}{11\cdot3\cdot2\cdot7}}{\frac{70}{11\cdot3\cdot2\cdot7}}=\frac{60}{70}=\mathbf{\frac{6}{7}}$

3　5枚のカードの取り出し方は　${}_9C_5=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\mathbf{126}$（通り）

(1) 5が含まれるとき，残り4枚を残り8枚から選ぶ　${}_8C_4=\mathbf{70}$（通り）ある．

5が含まれないとき　126−70＝**56**（通り）ある．

(2) 得点が0点となるのは，5が含まれない場合である．よって，その確率は　$\frac{56}{126}=\mathbf{\frac{4}{9}}$

得点が1点となるのは，5が小さい方から1番目にあるときである．

残り4枚を6，7，8，9の4枚から選び，小さい順に並べる方法は${}_4C_4=1$（通り）

よって，その確率は　$\mathbf{\frac{1}{126}}$

得点が2点となるのは，5が小さい方から2番目にあるときである．

5より小さい数を1，2，3，4から1枚選び，5より大きい数を6，7，8，9から3枚選んで，小さい順に並べる．

その確率は　$\frac{{}_4C_1\times{}_4C_3\cdot1}{126}=\frac{16}{126}=\mathbf{\frac{8}{63}}$

得点が3点となるのは，5が小さい方から3番目，つまり，ちょうど中央にあるときである．

5より小さい数を1，2，3，4の4枚から2枚選び，小さい順に並べ，

5より大きい数を6，7，8，9の4枚から2枚選び，小さい順に並べる．

その確率は　$\frac{{}_4C_2\cdot1\times{}_4C_2\cdot1}{126}=\frac{36}{126}=\mathbf{\frac{2}{7}}$

取り出した5枚のカードの中に5と書かれたカードがあることの余事象は，得点が0点であることより，その確率は　$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}=\frac{70}{126}$

また，5より小さいカードと大きいカードの枚数の対称性を考えることにより

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

得点が 4 点になる確率は，2 点になる確率と同じであり，
得点が 5 点になる確率は，1 点になる確率と同じである．

よって，得点が 4 点以上になる確率は　$\dfrac{16}{126}+\dfrac{1}{126}=\dfrac{17}{126}$

したがって，求める条件付き確率は　$\dfrac{\frac{17}{126}}{\frac{70}{126}}=\boldsymbol{\dfrac{17}{70}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　場合の数・確率

1　(1)　3個の球の取り出し方は全部で $_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=5\cdot4=\mathbf{20}$（通り）

その20通りの番号を列挙すると以下のとおりである．

(0, 1, 2)，(0, 1, 3)，(0, 1, 4)，(0, 1, 5)，(0, 2, 3)，(0, 2, 4)，(0, 2, 5)，
(0, 3, 4)，(0, 3, 5)，(0, 4, 5)，(1, 2, 3)，(1, 2, 4)，(1, 2, 5)，(1, 3, 4)，
(1, 3, 5)，(1, 4, 5)，(2, 3, 4)，(2, 3, 5)，(2, 4, 5)，(3, 4, 5)

よって，連続する2つの数を含まないのは

(0, 2, 4)，(0, 2, 5)，(0, 3, 5)，(1, 3, 5) の4通りである．

(2)　(i)　得点が0点となるのは，0を含み，他の2つの番号が1～5のうちの2つのとき．

その確率は　$\dfrac{_5C_2}{20}=\dfrac{10}{20}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　である．

(ii)　得点が4点となるのは，4を含み，他の2つの番号が1～3のうち2つのとき．

その確率は　$\dfrac{_3C_2}{20}=\mathbf{\dfrac{3}{20}}$　である．

得点が5点となるのは，5を含み，他の2つの番号が1～4のうち2つのとき．

その確率は　$\dfrac{_4C_2}{20}=\dfrac{6}{20}=\mathbf{\dfrac{3}{10}}$　である．

また，得点が5点かつ連続した2つの数を含まないのは，

(1)より3個の球の番号が(1，3，5）のときのみ

したがって求める条件付き確率は　$\dfrac{\dfrac{1}{20}}{\dfrac{6}{20}}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$　である．

(iii)　求める確率は　$\left(\dfrac{1}{20}\right)^2(10^2+3^2+6^2+1^2)=\dfrac{146}{400}=\mathbf{\dfrac{73}{200}}$　である．

2　(1)　5枚のカードの取り出し方は　$_{10}C_5=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=9\cdot4\cdot7=\mathbf{252}$（通り）

その内，得点が0点となるのは5枚のうち最大の数 L が偶数のときであり，

$L=10$，8，6に限られる．

$L=10$ のときは，残り1～9のうち4枚取り出す　$_9C_4=126$（通り）ある．

$L=8$ のときは，残り1～7のうち4枚取り出す　$_7C_4=35$（通り）ある．

$L=6$ のときは，残り1～5のうち4枚取り出す　$_5C_4=5$（通り）ある．

以上より，得点が0点となる取り出し方は　$126+35+5=\mathbf{166}$（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　得点が0点でないのはLが奇数のときである．

$L=9$のとき，5枚カードを取り出すことを考えると$S\leqq 5$である．

$S=5$のとき，残り6～8のうち3枚取り出す1通り．このとき　$L-S=4$

$S=4$のとき，残り5～8のうち3枚取り出す　${}_4C_3=4$（通り）

このとき　$L-S=5$

$S=3$のときは　${}_5C_3=10$（通り）　$L-S=6$

$S=2$のときは　${}_6C_3=20$（通り）　$L-S=7$

$S=1$のときは　${}_7C_3=35$（通り）　$L-S=8$

$L=7$のとき，$S\leqq 3$である．

$S=3$のときは1通り．このとき　$L-S=4$

$S=2$のときは　${}_4C_3=4$（通り）　$L-S=5$

$S=1$のときは　${}_5C_3=10$（通り）　$L-S=6$

$L=5$のとき，$S\leqq 1$すなわち$S=1$のみである．このとき1通りで　$L-S=4$

以上より，とり得る得点の中で最も低いのは**4**点で，$1+1+1=$**3**通りある．

最も高いのは**8**点で，**35**通りある．

(3)　得点が5点となる確率は　$\dfrac{4+4}{9\cdot4\cdot7}\left(=\dfrac{8}{252}\right)=\dfrac{1+1}{9\cdot7}=\mathbf{\dfrac{2}{63}}$

得点が6点となる確率は　$\dfrac{10+10}{9\cdot4\cdot7}\left(=\dfrac{20}{252}\right)=\dfrac{5+5}{9\cdot2\cdot7}=\dfrac{10}{126}=\mathbf{\dfrac{5}{63}}$

得点が7点となる確率は　$\dfrac{20}{9\cdot4\cdot7}\left(=\dfrac{20}{252}\right)=\dfrac{5}{9\cdot7}=\mathbf{\dfrac{5}{63}}$

3　(1)　サイコロを2回振ったとき，

$P_1=P_2$となるのは，1回目の出目にかかわらず2回目の出目が5のときである．

よって，その確率は　$\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$　である．

P_1とP_2が隣り合うのは，1回目の出目にかかわらず2回目の出目が1か4か6のときである．よって，その確率は　$\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{3}{6}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　である．

$P_2=A$となるのは，順に1−4，2−3，3−2，4−1，4−6，5−5，6−4と出たときである．

よって，その確率は$\mathbf{\dfrac{7}{36}}$である．（1回目が4のときのみ2通りあることに注意）

$P_2=C$となるのは，順に1−1，1−6，2−5，3−4，4−3，5−2，6−1，6−6と出たときである．

よって，その確率は　$\dfrac{8}{36}=\mathbf{\dfrac{2}{9}}$　である．（1回目が1と6のときに注意）

$P_1=A$となるのは1回目に5が出たとき．その確率は$\dfrac{1}{6}$であり，この確率は2回

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

目の出目によって影響されない．$P_2=\mathrm{A}$ となる確率は上記 $\dfrac{7}{36}$ である．

また　$P_1=\mathrm{A}$　かつ　$P_2=\mathrm{A}$　となるのは順に 5−5 と出たときのみであり，その確率は $\dfrac{1}{36}$ である．

ゆえに P_1 または P_2 が A となる確率は　$\dfrac{1}{6}+\dfrac{7}{36}-\dfrac{1}{36}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$　である．

(2)　サイコロを2回振って到達した点のうち，3回目にAに止まる出目が2通り存在するのは，(1)からAの1つ前の点，すなわちEであるとわかる．2回目がE以外の場合は，3回目にAに止まる出目はそれぞれ1通りのみである．

$P_2=\mathrm{E}$ となるのは，順に 1−3，2−2，3−1，3−6，4−5，5−4，6−3 のときであり，その確率は $\dfrac{7}{36}$ である．よって，$P_2=\mathrm{E}$ かつ $P_3=\mathrm{A}$ となる確率は　$\dfrac{7}{36}\cdot\dfrac{2}{6}=\mathbf{\dfrac{7}{108}}$ である．

また，$P_2\neq\mathrm{E}$ となる確率は　$1-\dfrac{7}{36}=\dfrac{29}{36}$　である．

よって，$P_2\neq\mathrm{E}$　かつ　$P_3=\mathrm{A}$　となる確率は　$\dfrac{29}{36}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{29}{216}$　である．

以上より，$P_3=\mathrm{A}$ となる確率は　$\dfrac{7}{108}+\dfrac{29}{216}=\mathbf{\dfrac{43}{216}}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。